Tentamen Meetkunde

10 april 2012, 9–12 uur

N.B.: dit is een open-boek-tentamen

Opgave 1 (7+7+7+9=30 pt.)
Laat $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ een gladde (C^∞) unit-speed kromme zijn met positieve kromming. I is een interval. Laat $\overline{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$ de *offset-kromme* zijn gegeven door

$$\overline{\alpha}(s) = \alpha(s) + f(s)\,N(s),$$

waarbij $N(s)$ de normaal is van α in $\alpha(s)$ en $f : I \to \mathbb{R}$ een gladde functie is. Merk op dat $\overline{\alpha}$ in het algemeen *geen* unit-speed kromme is. Verder is gegeven dat de normaal $\overline{N}(s)$ van $\overline{\alpha}$ in $\overline{\alpha}(s)$ gelijk is aan $\pm N(s)$.

1. Druk de raakvector $\overline{\alpha}'(s)$ uit in het Frenet-Serret frame van α in $\alpha(s)$.
2. Toon aan dat $f(s)$ constant is.
3. Toon aan dat de hoek tussen de raakvector aan α in $\alpha(s)$ en de raakvector aan $\overline{\alpha}$ in $\overline{\alpha}(s)$ constant is.
4. Toon aan dat er constanten a en b zijn zó dat, voor $s \in I$:

$$a\kappa(s) + b\tau(s) = 1.$$

Opgave 2 (6+6+6+6+6=30 pt.)
Het oppervlak $\mathbb{M}$ in $\mathbb{R}^3$ heeft een parametrisering $\mathbf{x}(u, v)$ waarin de coefficiënten E en G van de eerste fundamentaalvorm constant zijn. (De andere coëfficient F hangt dus af van u en v.) Als alle parameterkrommen[1] asymptotische krommen zijn van $\mathbb{M}$, dan is de Gauß-kromming van $\mathbb{M}$ constant. Doel van deze opgave is dit te bewijzen.

Dit bewijs bevat de volgende stappen. Noem de coëfficienten van de tweede normaalvorm L, M en N.

(i) Laat U het eenheidsnormaalvectorveld zijn van $\mathbb{M}$. Toon aan dat

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v &= 0, \\ \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_{uu} \cdot U &= 0, \\ \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_{vv} \cdot U &= 0. \end{aligned}$$

(ii) Toon aan dat er functies A, B, C en D zijn met

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} &= A\mathbf{x}_u + B\mathbf{x}_v, \\ \mathbf{x}_{vv} &= C\mathbf{x}_u + D\mathbf{x}_v, \end{aligned}$$

en dat $\mathbf{x}_{uv} = M\,U$.

Z.O.Z.

[1] Dus krommen van de vorm $u \mapsto \mathbf{x}(u, v_0)$ en $v \mapsto \mathbf{x}(u_0, v)$, met v_0 respectievelijk u_0 constant.

(iii) Toon aan dat uit bovenstaande volgt $M_u = AM$ en $M_v = DM$.

(iv) Toon aan dat

$$A = -\frac{F F_u}{EG - F^2}, \qquad D = -\frac{F F_v}{EG - F^2}.$$

(v) Leidt uit (iii) en (iv) af dat $K_u = K_v = 0$, en concludeer dat de Gauß-kromming K constant is.

Opgave 3 (9+7+7+7=30 pt.)
Beschouw het oppervlak $\mathbb{M} = \mathbb{R}^2$, met Riemannse metriek $\langle , \rangle$ gegeven door

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = v_1 w_1 + e^{2x} v_2 w_2,$$

waarin $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{(x,y)}M$ gegeven zijn door $\mathbf{v} = v_1 U_1 + v_2 U_2$ en $\mathbf{w} = w_1 U_1 + w_2 U_2$. Hierbij is $\{U_1, U_2\}$ het standaard frame-field op $\mathbb{R}^2$.

1. Bepaal de Gauß-kromming van $\mathbb{M}$.

2. Toon aan dat de krommen met vergelijking $x = x_0$, met x_0 constant, alle dezelfde geodetische kromming 1 hebben.

Laat $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ het bovenhalfvlak zijn met Riemannse metriek $\langle\langle , \rangle\rangle$ gegeven door

$$\langle\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle\rangle = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{y^2},$$

waarbij $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ het Euclidische inproduct is van $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{(x,y)}\mathbb{H}^2$.

De afbeelding $f : \mathbb{M} \to \mathbb{H}^2$ is gegeven door $f(x, y) = (y, e^{-x})$.

3. Toon aan dat f een isometrie is.

4. Elke horizontale lijn $y = y_0$, met y_0 constant, is een geodeet van $\mathbb{M}$, en tussen elk tweetal (verschillende) horizontale lijnen ligt precies één geodeet van $\mathbb{M}$ met deze horizontale lijnen als asymptoten (m.a.w., de geodeet snijdt geen van deze lijnen, maar komt er wel willekeurig dicht bij). Toon deze beweringen aan, gebruik makend van kennis over de geodeten van $\mathbb{H}^2$.

Uitwerkingen

1 en 2. De raakvector $\overline{\alpha}'(s)$ staat loodrecht op $N(s)$. Omdat

$$\overline{\alpha}'(s) = \alpha'(s) + f'(s)N(s) + f(s)N'(s) = \big(1 - \kappa(s)f(s)\big)T(s) + f'(s)N(s) + \tau(s)f(s)B(s),$$

volgt hieruit $f'(s) = 0$, en dus is f een constante functie.
3. We moeten aantonen dat het inproduct van $T(s)$ en de eenheidsraakvector $\overline{T}(s)$ van $\overline{\alpha}$ in $\overline{\alpha(s)}$ constant is. M.b.v. Lemma 2.4.1 leiden we af:

$$(T \cdot \overline{T})' = T' \cdot \overline{T} + T \cdot \overline{T}' = \kappa N \cdot \overline{T} + T \cdot (\overline{\kappa}\nu\overline{N}).$$

Omdat $\overline{N} = \pm N$, geldt $\kappa N \cdot \overline{T} = 0$ en $T \cdot \overline{N} = 0$. Dus $T \cdot \overline{T}$ is constant.
4. De constante waarde van f noemen we a. We nemen aan dat $a \neq 0$. Omdat $\overline{\alpha}' = (1 - a\kappa)T + a\tau B$, zie onderdeel 1, volgt

$$\overline{T} = \frac{(1 - a\kappa)T + a\tau B}{\sqrt{(1 - a\kappa)^2 + a^2\tau^2}}.$$

Uit onderdeel 3 volgt dus dat

$$\frac{1 - a\kappa}{\sqrt{(1 - a\kappa)^2 + a^2\tau^2}}$$

constant is, zeg gelijk aan c. Merk op dat $-1 < c < 1$ als $a \neq 0$ en $\tau \neq 0$. Dan geldt, voor $\tau \neq 0$,

$$(1 - a\kappa)^2 = c^2\big((1 - a\kappa)^2 + a^2\tau^2\big),$$

en dus $a\kappa + b\tau = 1$, voor $b = \pm\dfrac{ac}{\sqrt{1 - c^2}}$. Als $\tau = 0$ dan geldt $a\kappa = 1$, en dus $a\kappa + b\tau = 1$ voor alle $b \in \mathbb{R}$.

Opgave 2. We delen het bewijs op in de volgende stappen.

(i) De normale kromming in de richtingen $\mathbf{x}_u$ en $\mathbf{x}_v$ is nul, dus voor de coëfficienten van de tweede fundamentaalvorm geldt $L = S(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_u = U \cdot \mathbf{x}_{uu} = 0$ en $N = S(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_v = U \cdot \mathbf{x}_{vv} = 0$.

Omdat $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u$ constant is, volgt door partiële differentiatie naar u en v dat $\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u = 0$ respectievelijk $\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u = 0$.

Uit $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$ volgt evenzo door partiële differentiatie naar u en v dat $\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v = 0$ respectievelijk $\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_v = 0$.

(ii) Uit (i) volgt dat $\mathbf{x}_{uu}$ en $\mathbf{x}_{vv}$ loodrecht op U staan en dus raakvectoren aan S zijn. Dus zijn er functies A, B, C en D met

$$\mathbf{x}_{uu} = A\mathbf{x}_u + B\mathbf{x}_v,$$
$$\mathbf{x}_{vv} = C\mathbf{x}_u + D\mathbf{x}_v.$$

Verder volgt uit (i) dat $\mathbf{x}_{uv}$ loodrecht staat op $\mathbf{x}_u$ en $\mathbf{x}_v$, en dus in de richting van de normaal wijst. Omdat $\mathbf{x}_{uv} \cdot U = M$, volgt $\mathbf{x}_{uv} = MU$.

(iii) Uit $M = \mathbf{x}_{uv} \cdot U$ en $U \cdot U_u = U \cdot U_v = 0$ (waarom?) volgt

$$M_u = \mathbf{x}_{uuv} \cdot U = (A\mathbf{x}_{uv} + B\mathbf{x}_{vv} + A_u\mathbf{x}_u + B_u\mathbf{x}_v) \cdot U = AM.$$

Analoog leiden we af

$$M_v = DM.$$

(iii) Partiëel differentiëren van $F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v$ naar u levert m.b.v. (ii) $F_u = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v$. Analoog: $F_v = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_u$. We bepalen nu A en D als volgt.

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_u = AE + BF, \\ F_u &= \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{x}_v = AF + BG. \end{aligned}$$

Hieruit volgt:

$$A = -\frac{F\,F_u}{EG - F^2}, \quad B = \frac{F_u}{EG - F^2}.$$

Analoog:

$$D = -\frac{F\,F_v}{EG - F^2}.$$

(iv) Merk op dat $L = U \cdot \mathbf{x}_{uu} = 0$ en $N = U \cdot \mathbf{x}_{vv} = 0$, en dus

$$K = -\frac{M^2}{EG - F^2}.$$

Hieruit leiden we af

$$\begin{aligned} K_u &= -\frac{2MM_u}{EG - F^2} + \frac{M^2(-2FF_u)}{(EG - F^2)^2} \\ &= -\frac{2AM^2}{EG - F^2} + \frac{M^2(-2FF_u)}{(EG - F^2)^2} \\ &= \frac{2M^2}{EG - F^2}\left(A + \frac{FF_u}{EG - F^2}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Analoog leiden we af dat $K_v = 0$, dus K is constant.

Opgave 3.

1. Voor de parametrisering $\mathbf{x}(x, y) = (x, y)$ van $\mathbb{M}$ geldt: $E = 1, F = 0$ en $G = e^{2x}$. Een frame field wordt dus gegeven door $E_1 = U_1$ en $E_2 = e^{-x}U_2$. De duale 1-vormen zijn $\vartheta_1 = dx$ en $\vartheta_2 = e^x dy$. Hiervoor geldt $d\vartheta_1 = 0$ en $d\vartheta_2 = e^x dx \wedge dy = \vartheta_1 \wedge \vartheta_2$, dus de connectievorm is $\omega_{12} = e^x dy = \vartheta_2$. Hieruit volgt:

$$d\omega_{12} = e^x dx \wedge dy = \vartheta_1 \wedge \vartheta_2,$$

dus $K = -d\omega_{12}(E_1, E_2) = -1$.
NB: omdat $\mathbf{x}$ een orthogonale patch is ($F = 0$), kan ook de identiteit uit Propositie 6.6.3 gebruikt worden.

2. De parametrisering $\alpha(s) = (x_0, s)$ heeft constant speed, want $\| \alpha'(s) \|^2 = e^{2x_0}$. De parametrisering $\beta(s) = (x_0, e^{-x_0}s)$ heeft dus unit speed, en $\beta' = E_2$. De hoek $\varphi(s)$ tussen E_1 en $\beta'(s)$ is constant (gelijk aan $\frac{1}{2}\pi$), dus

$$\kappa_g(s) = \varphi'(s) + \omega_{12}(\beta') = 0 + \vartheta_2(E_2) = 1.$$

3. Voor $E_i \in T_{(x,y)}\mathbb{M}$ berekenen we $\overline{E}_i = f_*(E_i) \in T_{f(x,y)}\mathbb{H}^2$ als volgt:

$$\begin{aligned} f_*(E_1) &= f_*(\mathbf{x}_x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = (0, -e^{-x}) = -e^{-x}\, U_2, \\ f_*(E_2) &= f_*(e^{-x}\mathbf{x}_y) = e^{-x}\, f_*(\mathbf{x}_y) = e^{-x}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = e^{-x}\, U_1. \end{aligned}$$

Dus

$$\begin{aligned} \langle\langle \overline{E_1}, \overline{E_1} \rangle\rangle_{f(x,y)} &= \frac{(-e^{-x}\, U_2) \cdot (-e^{-x}\, U_2)}{(e^{-x})^2} = 1, \\ \langle\langle \overline{E_1}, \overline{E_2} \rangle\rangle_{f(x,y)} &= \frac{(-e^{-x}\, U_2) \cdot (e^{-x}\, U_1)}{(e^{-x})^2} = 0, \\ \langle\langle \overline{E_2}, \overline{E_2} \rangle\rangle_{f(x,y)} &= \frac{(e^{-x}\, U_1) \cdot (e^{-x}\, U_1)}{(e^{-x})^2} = 1. \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat f een isometrie is.

4. De geodeten van $\mathbb{H}^2$ zijn verticale halflijnen $t \mapsto (x_0, t)$, met $t > 0$, en cirkels $t \mapsto (x_0 + r\cos t, r\sin t)$, met $0 < t < \pi$. Merk op dat deze parametriseringen 'pregeodeten' zijn (het meetkundige beeld is wel dat van een geodeet, maar de parametrisering is niet constant speed).

De inverse afbeelding, gegeven door $f^{-1}(x,y) = (-\log y, x)$, is ook een isometrie, en beeldt geodeten van $\mathbb{H}^2$ dus af op geodeten van $\mathbb{M}$. De verticale halflijnen in $\mathbb{H}^2$ worden door f^{-1} afgebeeld op horizontale lijnen in $\mathbb{M}$.

Het beeld van de halfcirkel $t \mapsto (x_0 + r\cos t, r\sin t)$ onder f^{-1} heeft parametrisering

$$t \mapsto (\log \frac{1}{r\sin t}, x_0 + r\cos t), \tag{1}$$

met als asymptoten $y = x_0 - r$ (voor $t \uparrow \pi$) en $y = x_0 + r$ (voor $t \downarrow 0$). De twee horizontale lijnen $y = y_0$ en $y = y_1$, met $y_0 < y_1$, zijn dus asymptoten van de geodeet met parametrisering (1), waarbij $x_0 = \frac{1}{2}(y_0 + y_1)$ en $r = \frac{1}{2}(y_1 - y_0)$.